هندسهٔ تربیع
و ارتباط آن با علوم گوناگون

مریم شاه‌محمدی
دبیر منطقه یک
آموزش‌وپرورش
شهر تهران

اشاره

مسئلهٔ تربیع یکی از مســائل جالب، قدیمی و مطرح در هندسه، نجوم، عرفان و فقه اسلامی بوده است. شــکل مربع را همه از طریق علم هندسه به‌صورت یک چهارضلعی که چهار گوشهٔ آن عمودبرهم هستند، درک کرده‌اند. ولی در درک شــهودی از مربع، احساساتی مانند تعادل، تقارن، فردیت، قدرت، سنگینی، امنیت و... مطرح شده اســت. از طرف دیگر، با توجه به اینکه چهارگوش (مربع واحد) به‌عنوان یک شکل هندسی، در محاســبهٔ مساحت به‌طور خاص مطرح است، در مقالهٔ حاضر ســعی شده است با تبیین مسئلهٔ تربیع در هندسه و چگونگی تربیعِ برخی از شکل‌ها، ارتباط بین مساحت شکل‌های هندسی و مربع مطرح شود. همچنین با اشارهٔ اجمالی به موضوع تربیع در نجوم و فقه، نمونه‌هایی از کاربرد آن در ادبیات، معماری و عرفان اسلامی مورد بررسی قرار گیرد.

کعبه در تربیع همچون تخت نرد مهره‌باز　　کعبتین جان‌ها و نرّاد انسی و جان آمده
خاقانی

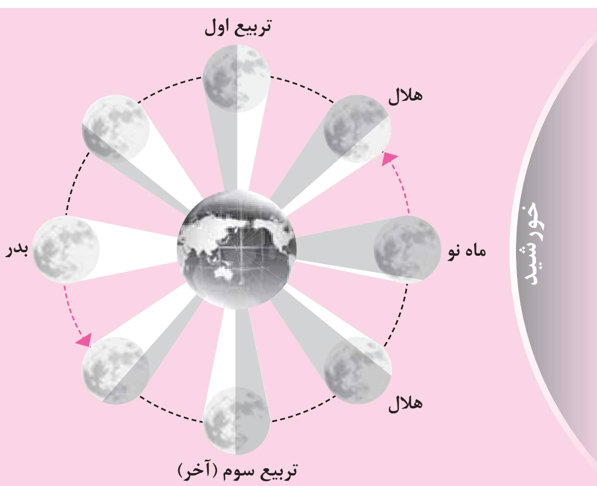
کلیدواژه‌ها: **تربیع، هندسه، نجوم، عرفان، معماری**

مقدمه

«تربیع» در لغت به معنای چهارسوی کردن و چیزی را چهارسو ساختن اســت (لغت‌نامهٔ دهخدا). در علم نجوم، به روشن بودن یک چهارم ماه در شــب‌های هفتم و بیســتم و یکم هر ماه قمری اطلاق شده اســت (فرهنگ معین). تربیع در هندسه و در مورد شکل‌های هندسی به معنای ترسیم مربعی است که مساحتش با مساحت شکل مفروض برابر باشد.

اگرچه تربیع واژهٔ مشــترکی در هندســه و نجوم است، اما بیانِ تعاریف آن در هر یک، تمایز این ارتباط را آشکار خواهد ساخت. تربیع در هندسه به معنای مطلق چهارگوش (مربع و مستطیل) است و در اصطلاح نجوم عبارت اســت از قرار گرفتن ماه در وضعی که نیمی از آن روشن دیده می‌شود و حالت نیمه روشنی میان دو برج یا دو سیاره اســت. به نوشتهٔ ابوریحان بیرونی در کتاب «التفهیم»، اگر فاصلهٔ ماه از خورشید، به اندازهٔ ســه برج (۹۰ درجه) باشد، آن را «تربیع اول» می‌نامند که تقریباً در شب هفتم ماه قمری رخ می‌دهد. اگر این فاصله به اندازهٔ نه برج (۲۷۰ درجه) باشــد، آن را «تربیع دوم» می‌نامند که زمان آن تقریباً شب بیست‌ویکم ماه قمری است (شکل ۱).

دانشــمندان علم نجوم قدیم و به دنبال آن شاعران کهن، حالت تربیعِ ســیاره‌ها را به حالت نیمه دشمنی تعبیر کرده‌اند و در منابع و متون قدیمی دورهٔ اســلامی شواهد بسیاری مبنی بر وجود اعتقاد به نحــس بودن تربیعِ نجومی وجود دارد. هر چند حرکات و صور فلکی

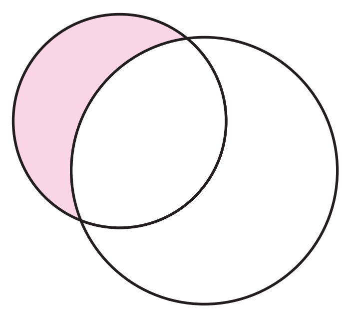


شکل ۱. نمایش تربیع در نجوم

و اجرام آســمانی بر زندگی بشــر تأثیرات فراوانی دارند، با این حال وقتی به آموزه‌های اسلامی توجه می‌شود، نتیجه می‌گیریم که نباید به این امور بیش از حد مجاز اعتنا کرد و کل برنامه‌های زندگی خود را براســاس آن‌ها تنظیم کرد. البته این مطلــب را هم نباید نادیده گرفت که به اعتراف خود منجمان، این‌گونه برداشت‌های غیرمادی و حکم‌های غیبی از حالت‌های نجوم و ستارگان، دقیق و قطعی نیست و فقط تصورات ذهنی و احتمالی است.

پیشینه‌ای بر تربیع شکل‌های هندسی

در نظر یونانیان، مســئلهٔ تربیع یک شــکل به این معنا بود که بتوانند با خط‌کش، تراز چوبی و پرگار، مربعی به مساحتی برابر شکل موردنظر ترسیم کنند. اگر چنین کاری برای یک شکل خاص میسر بود، اصطلاحاً آن را «تربیع‌پذیر» می‌گفتند. آن‌ها از این راه توانســته بودند به چگونگی محاسبهٔ مساحت هر شکل پهلودار پی ببرند. زمانی که مسئلهٔ محاسبهٔ مساحت دایره پیش آمد، دریافتند که تربیع دایره، مسئله‌ای حل‌نشدنی به نظر می‌رســد. **بقراط خیوسی**، ریاضی‌دان یونانی، نخســتین کســی بود که راه‌حلی برای تربیع هلال[1] (اینکه چگونه می‌توان مربعی رســم کرد که مســاحت آن با مساحت هلال مفروض برابر باشد) پیدا کرد (شکل ۲).



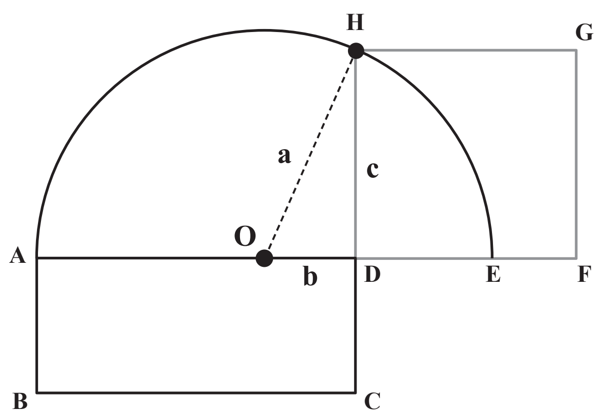
شکل ۲. نمایش هلال

تربیع هلال را می‌توان یکی از نخستین اثبات‌های هندسی تاریخ ریاضیات محســوب کرد. از دانشمندان دورهٔ اسلامی، تنها **ابن‌هیثم** رسالهٔ مســتقلی دربارهٔ تربیع دایره با نام «فی تربیع‌الدایره» تألیف و در آن (ص ۸۵) از «رســالهٔ مســاحة الدایره» **ارشمیدس** یاد کرده است. بعضی از دانشــمندان دورهٔ اسلامی، از جمله ابوریحان بیرونی و **غیاث‌الدین جمشــید کاشانی** نیز در بررســی این موضوع، به تعیین نســبت دایره به قطر آن پرداختند. تکلیف مسئلهٔ تربیع دایره را ســرانجام **فردیناند فون لیندمان**[2]، ریاضی‌دان آلمانی، روشــن کرد. اثبات لیندمان بســیار پیچیده است. ولی بعدها، **ایوان نیون**[3]، ریاضی‌دان انگلیسی، اثبات‌های ساده‌تری یافت که برای هر دانشجوی ریاضی درک‌شدنی است.

تربیع چندضلعی و هلال

مسئلهٔ ۱: تربیع مستطیل: چگونه می‌توان تنها به کمک پرگار و خط‌کش مربعی ساخت که مساحتش با مساحتِ مستطیل مفروض برابر باشد؟

مســتطیل دلخــواه ABCD را در نظر بگیریــد. AD را امتداد می‌دهیــم و به کمک پرگار به مرکز D و شــعاع CD کمانی رســم می‌کنیم تا نقطهٔ E مشــخص شود. وسط AE را O می‌نامیم. اگر به مرکز O و شــعاع AO=EO نیم‌دایره‌ای رسم کنیم، امتداد CD را در H قطع می‌کند. بدین ترتیب مربعی که به ضلع DH ایجاد می‌شود، مربع موردنظر است (شکل ۳)



شکل ۳. نمایش تربیع مستطیل

برهان: طول‌هــای OH، OD و DH را به‌ترتیــب a، b و c در نظر بگیرید، طبق قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$a^2 - b^2 = c^2$ (۱)

$\overline{AD} = a + b$ (۲)

$\overline{CD} = \overline{DE} = a - b$ (۳)

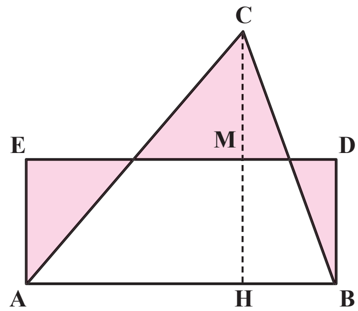
$S_{ABCD} = \overline{AD} \times \overline{CD} = (a+b)(a-b)$

$= a^2 - b^2 = c^2 = S_{DFGH}$ (۴)

مسئلهٔ ۲: تربیــع مثــلث: چگونــه می‌توان تنها به کمک پرگار و خط‌کش مربعی ساخت که مساحتش با مساحتِ مثلث مفروض برابر باشد؟

مثلث دلخواه ABC را در نظر بگیرید و ارتفاع CH را رسم کنید. وسط CH را M بنامید و مستطیل ABDE را به گونه‌ای رسم کنید (شکل ۴) که رابطهٔ زیر برقرار باشد:

$\overline{DB} = \overline{EA} = \overline{MH}$ (۵)

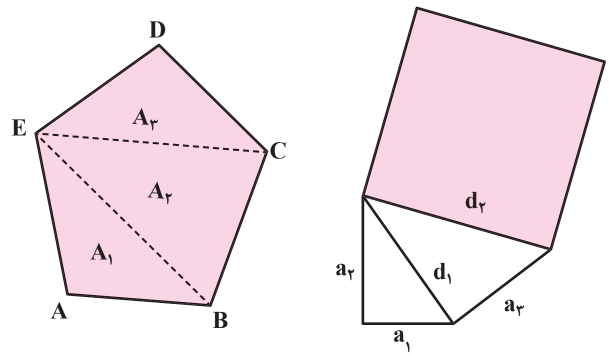


شکل ۴. نمایش تربیع مثلث

با توجه به قضیهٔ تالس و همنهشتی مثلث‌های کوچکِ ایجاد شده، می‌توان نشان داد که این مستطیل مساحتی برابر مثلث مفروض دارد و به راحتی نظیر مسئلهٔ ۱ تربیع‌پذیر خواهد شد.

مسئله ۳: تربیع چندضلعی: چگونه می‌توان تنها به کمک پرگار و خط‌کش یک چندضلعی دلخواه را تربیع کرد؟

برهان: هر چندضلعی را می‌توان با رسم قطرهایش به تعدادی مثلث تقسیم کرد (شکل ۵) و طبق مسئلهٔ ۲، این مثلث‌ها تربیع‌پذیر هستند.



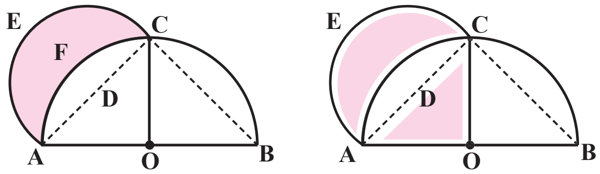
شکل ۵. نمایش تربیع چندضلعی

بدین‌ترتیب مربع‌هایی با اضلاع a_1، a_2 و a_3 که مساحتشان به ترتیب برابر A_1، A_2 و A_3 باشد، قابل ساختن است. یک مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع a_1 و a_2 و وتر d_1 تشکیل می‌دهیم. همچنین یک مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع d_1 و a_3 و وتر d_2 تشکیل می‌دهیم. مربعی که به ضلع d_2 رسم می‌شود، جواب مسئله است.

$$d_2^2 = d_1^2 + a_3^2 = (a_1^2 + a_2^2) + a_3^2 = A_1 + A_2 + A_3 \quad (۶)$$

مسئله ۴: تربیع هلال: چگونه می‌توان مربعی رسم کرد که مساحتش با مساحت هلال مفروض برابر باشد؟

قضیهٔ بقراط: در نیم‌دایره‌ای به مرکز O و قطر AB، با فرض عمود بودن OC بر AB، هلال AECF که از تقاطع نیم‌دایرهٔ مفروض با نیم‌دایره‌ای به قطر AC حاصل می‌شود، تربیع‌پذیر است (شکل ۶).



شکل ۶. نمایش قضیهٔ تربیع هلال

برهان: از نقطهٔ C به نقاط A و B وصل می‌کنیم. دو مثلث AOC و BOC هم‌نهشت هستند و داریم:

$$\overline{AC} = \overline{BC} \quad (۷)$$

با توجه به رابطهٔ فیثاغورس در مثلث ACB داریم:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{AC}^2 \quad (۸)$$

$$\xRightarrow{(۷),(۸)} \frac{S_{\widehat{AEC}}}{S_{\widehat{ACB}}} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2} = \frac{1}{2} \quad (۹)$$

از طرف دیگر:

$$S_{\widehat{AFCO}} = \frac{1}{2} S_{ACB} \quad (۱۰)$$

$$\xRightarrow{(۹),(۱۰)} S_{\widehat{AEC}} = S_{\widehat{AFCO}} \to S_{\widehat{AEC}} - S_{\widehat{AFCD}} = S_{\widehat{AFCO}} - S_{\widehat{AFCD}} \quad (۱۱)$$

$$S_{\widehat{AECF}} = S_{\Delta ACO} \quad (۱۲)$$

با تربیع مثلث ACO به روش مسئلهٔ ۲، اثبات پایان می‌یابد.

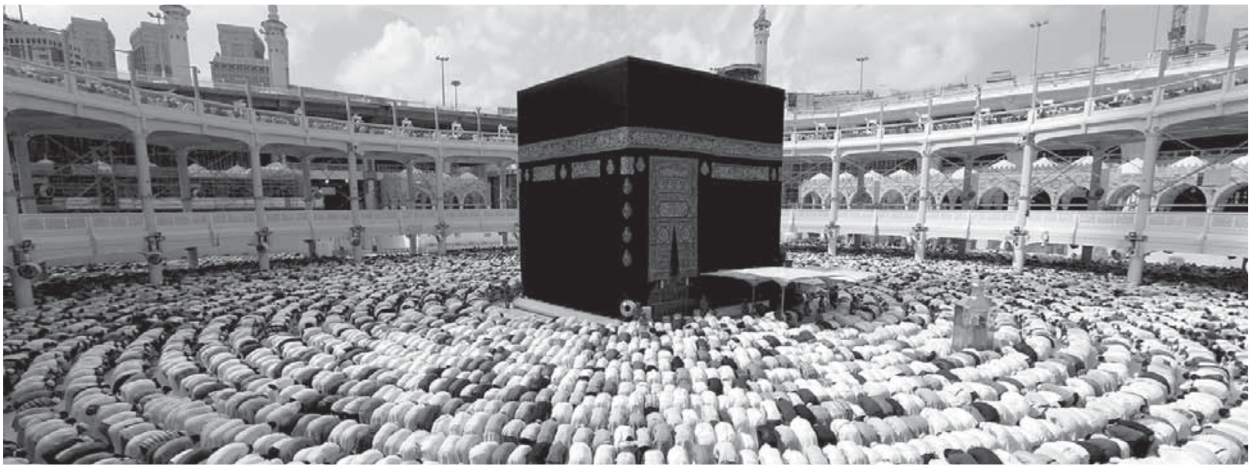
نمونه‌هایی از تربیع در عرفان اسلامی و هندسه معماری

۱. زبانِ رمزی هندسه، به ماهیت و ذات پدیده‌ها اشاره دارد

در کتاب‌های عرفان اسلامی، تربیعِ دایره و تبدیل دایره به مربع و به مانند آن، شبیه‌سازی فضای کروی طواف دور کعبه، یکی از رمزهای خانهٔ خدا تلقی شده است. در سنت اسلامی، مکعب با رازِ کعبه در ارتباط است. شکل مربع و مکعب در معماری ایران، فقط یک شکل چهارگوش نیست، بلکه رمزِ کمال و بازتاب معبدِ چهارگوش بهشتی است که کعبه تصویرِ زمینی آن است. مکعب، بدون در نظر گرفتن جهت‌های شش‌گانه‌اش، متوجه مرکز است و به وحدت و یکپارچگی پنهان در شکلِ خویش و به عبارت دیگر، به وحدت عالم مادی اشاره دارد.

شکل مکعب و به دنبال آن مربع، از نظر تمام ادیان و مکاتب معتقد به ماوراءالطبیعه، رمزِ ماده و جسم تلقی می‌شود و به عالم محسوس و دنیا تعبیر می‌گردد [اردلان، ۱۳۸۰: ۲۷].

در معماری سنتی، در بیشتر موارد، برای تبدیل دایره به مربع، از شکل مثلث استفاده شده است. مربع، منسجم‌ترین صورت خلقت، معرف زمین و نمایندهٔ کمیت است. و دایره، معرف آسمان، نمایندهٔ کیفیت. و این دو شکل، از طریق مثلث که شامل هر دو جنبه است، ترکیب می‌شوند.



شکل ۷. فضاسازی کعبه و رمز کیهانی تربیع دایره

۲. فضاسازی کعبه، رمز کیهانی تربیع دایره

فضاسازی کعبه براساس دو ساختار هندسی مربع یا مکعب (خود کعبه) و دایره (محوطه‌ای که طواف را به صورت دایره میسر می‌سازد) صورت گرفته است. انتخاب دو شکل دایره و مربع توسط خداوند برای فضاسازی کعبه، قطعاً رازها و بنیان‌هایی را در خود به امانت دارد و معماران اهل ذکر همواره در پی کشف نسبت این شکل‌ها (مربع و دایره) و بازگشایی رموز زیباشناسانهٔ آن‌ها و کاربرد این معانی در طرح‌ها و پلان‌های خود بوده‌اند. کاربرد طرح‌های هندسی و الگوهای ریاضی در هنر اسلامی بیانگر همین حقایق است.

هندسه و ریاضیات، نمایندهٔ جهان عقلی و نمونهٔ اعلایی است که خداوند، جهان جسمانی‌ای را که ما در آن زندگی می‌کنیم، از روی آن‌ها آفریده است. کعبه (خانهٔ خدا) رمزِ نقطه‌ای واحد و در مرکز زمین است و فضا را قطبی می‌سازد. مربع صورت ظاهر و تجسم یافتهٔ کعبه است و بر چهار رکن سبحان‌الله، والحمدلله، و لااله الا الله و الله‌اکبر استوار است. «تربیع دایره» که برای مدت‌های طولانی ذهن بشر را معطوف خود ساخته و از آن به «ماندالا»[۴] نیز یاد شده، «مجموعه‌ای از راز معرفت است» که در طول تاریخ، در اعتقادات تمدن‌های دینی، همواره معادل‌های خود را یافته است.

نتیجه‌گیری

همان‌گونه که مطرح شد، مربع از لحاظ دیداری، شکلی است متعادل، محکم و ایستا و نموداری از استواری، سکون و منطق و در عرفان، معرف زمین است. هندسهٔ تربیع و متمایل کردن شکل‌های هندسی به سمت مربع، نه‌تنها در قرون کهن و برای ریاضی‌دانان یونانی دارای اهمیت خاصی بوده، بلکه در معماری اسلامی نیز از اهمیت بسزایی برخوردار است و در فرهنگ ایرانی جایگاه مخصوص و ویژه‌ای دارد.

چهار ضلع مساوی مربع می‌تواند نماد چهار عنصر باد، آب، خاک و آتش یا در چهار جهت اصلی شمال، جنوب، شرق و غرب یا چهار فصل یا چهار مرحلهٔ زندگی از کودکی تا جوانی و میان‌سالی و پیری و یا چهار طبع سردی، گرمی، خشکی و رطوبت باشد. **افلاطون** مربع را به معنای مطلق زیبا می‌داند. و **نظامی گنجوی** شاعر بلندمرتبه ایرانی در انکار عقاید برخی منجمان که معتقد به نحسی تربیع بودند و ستایش حالت‌های تربیع نجومی می‌گوید:

چو سیارهٔ مشتری سربلند نظرهای او یک‌به‌یک سودمند
به تربیع و تثلیث گوهرفشان مربع‌نشین و مثلث‌نشان

پی‌نوشت‌ها

۱. شکل حاصل از تقاطع دو دایره را که بین دو کمان مقعر از آن دو دایره محسوب است، «هلال» می‌نامند.
2. Ferdinand von Lindemann
3. Ivan Niven
۴. در زبان سانسکریت به معنای دایره است و در شکل‌های گل، دایره، صلیب و یا چرخ با گرایش به ساختار چهار بخشی دیده می‌شود.

منابع

1. Corso, Alberto. Hippocrates Quadrature of The Lune, MA 330-History of Mathematics.
2. Dantzig, T. (1955). The Bequest of the Greeks, George Allen & Unwin Ltd., London.
3. Dedron, P and Itard, J. (1973). Mathematics and Mathematicians, Vol. 2, translated from French, by J.V. Field, The Open University Press, England.
4. Dunham, W. (1990). Journey Through Genius: The Great Theorems of Mathematics.
5. Gow, J. (1968). A Short History of Greek Mathematics. Chelsea Publishing Company
6. Heath, T. (1956). The Thirteen Books of Euclid's Elements. Vol 1. Dover
7. Heath, T. (1981). A History of Greek Mathematics. Dover Publications reprint.
8. Kustner, W.G.H. and M.H.H. (1975). The VNR Concise Encyclopedia of Mathematics, Van Nostrand Rusinhold Company.
9. Otero, D. (2008). "The Quadrature of the Circle and Hippocrates' Lunes."
10. Sarva Jagannadha Reddy, R.D. (2014). Pi of the Circle at www.rsjreddy. webnode. com
۱۱. اردلان، نادر و بختیار (۱۳۸۰). «حسن وحدت». سازمان زیباشناسی شهر تهران.
۱۲. گنون، رنه (۱۳۸۴). «سیطرهٔ کمیت و علائم آخرالزمان». ترجمهٔ علی‌محمد کاردان. مرکز نشر دانشگاهی. تهران. چاپ سوم.
۱۳. تقی‌زاده. (۱۳۸۳)، «کعبه تجلی و تفسیر زیبایی هستی»، نشریه هنرهای زیبا. شمارهٔ ۱۷.